DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

Teoría de conjuntos difusos

© Fernando Berzal, berzal@acm.org

Teoría de conjuntos difusos

- Conjuntos difusos
- Definición de subconjunto difuso
- Características de un conjunto difuso
- Principio de identidad (teorema de representación)
- Principio de extensión
- Aplicaciones

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Motivación

Necesidad de un marco conceptual para tratar la incertidumbre no probabilística y la imprecisión léxica.

p.ej.

"las personas altas"

"los números reales mucho mayores que 1"

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

INFORMATION AND CONTROL 8, 338–353 (1965)

Fuzzy Sets*

L. A. ZADEH

Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California

A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership (characteristic) function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one. The notions of inclusion, union, intersection, complement, relation, convexity, etc., are extended to such sets, and various properties of these notions in the context of fuzzy sets are established. In particular, a separation theorem for convex fuzzy sets is proved without requiring that the fuzzy sets be disjoint.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

1965

- Zadeh caracteriza el concepto de conjunto difuso (y, por extensión, la lógica difusa).

- Teoría de conjuntos asociada a la lógica infinitamente valorada de Lukasiewicz.

- **Origen del nombre**
  En fotografía, difuso/borroso [fuzzy] hace referencia a imágenes con los contornos mal definidos.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

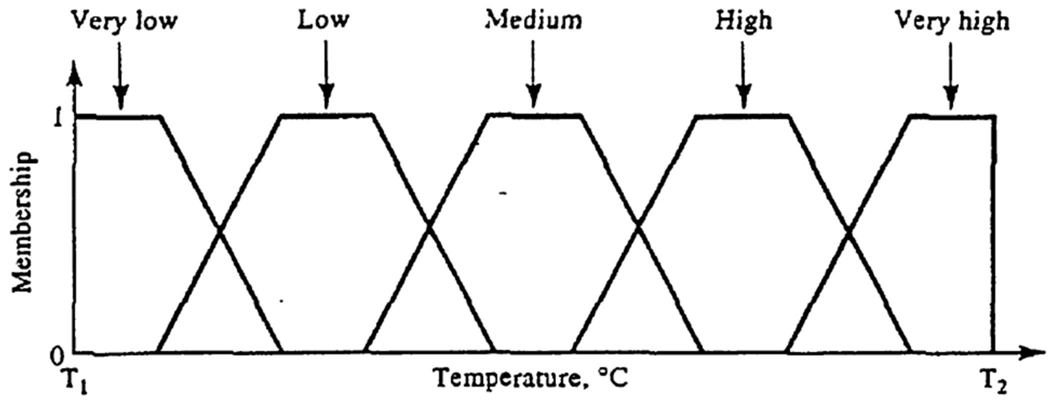
Idea básica

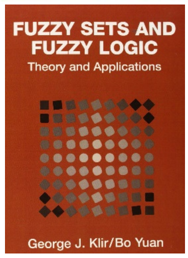
El rango de valores de pertenencia de un elemento a un conjunto puede variar en el intervalo [0,1], en lugar de estar limitado a dos valores {0,1}.

- Zadeh extiende las operaciones conjuntistas clásicas (los operadores lógicos).

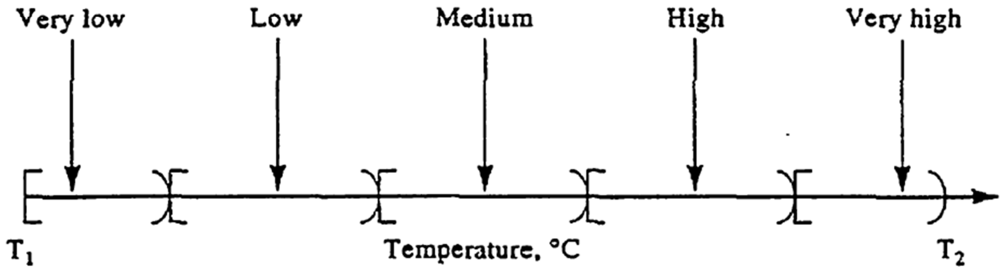
- A partir de la teoría de conjuntos difusos, se introduce la lógica difusa como una extensión de las lógicas multivaluadas.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]





Variable difusa [fuzzy]



Variable tradicional [crisp]

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Definición de conjunto difuso

Sea X un conjunto no vacío de objetos que consideraremos como referencial o universo de discurso.

Un conjunto difuso A sobre X es un conjunto de pares de valores $\{(x,r) \mid x \in X, r \in [0,1]\}$

- Cada elemento x,
  con su grado de pertenencia r al conjunto difuso A.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Definición de conjunto difuso

Se asocia a cada conjunto difuso A
una función de pertenencia que asocia
cada elemento de X con un valor del intervalo [0,1]:

Caracterización de un conjunto difuso

Función característica μA: $X \rightarrow [0,1]$

- $\mu A(x)$ representa el grado de pertenencia de x a A.
- Normalmente, se escribe A(x) en lugar de $\mu A(x)$.
- El conjunto A se describe como $A = \{ A(x)/x, x \in X \}$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Definición de conjunto difuso

Los valores de pertenencia (grados) varían entre 0 y 1.

- 0: No pertenece en absoluto al conjunto.
- 1: Pertenencia total.

Los conjuntos clásicos con un caso particular de conjunto difuso (función de pertenencia con valores en {0,1}).

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Definición de conjunto difuso

Si X es un conjunto finito $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$
y A es un subconjunto difuso de X,
a veces se utiliza la notación

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 +\ldots+ \mu_n/x_n$$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de un conjunto difuso

Altura [height]
$\sup \{A(x), x\in X\}$
Mayor valor de su función de pertenencia.

Conjunto difuso normalizado [normal]:
Aquél para el que existe un elemento que pertenece al conjunto difuso con grado 1 (totalmente), altura(A)=1

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de un conjunto difuso

Soporte [support]

soporte(A) = $\{x \in X \mid A(x)>0\}$

Elementos de X que pertenecen a A con grado >0.

Núcleo [core]

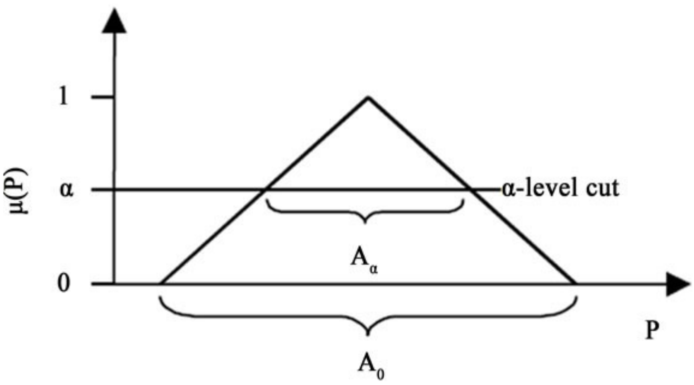
núcleo(A) = $\{x \in X \mid A(x)=1\}$

Elementos de X que pertenecen a A con grado 1.

Obviamente,
el núcleo siempre está incluido en el soporte.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de un conjunto difuso



α-corte [α-cut]

$A\alpha = \{x \in X \mid \alpha \leq A(x)\}$

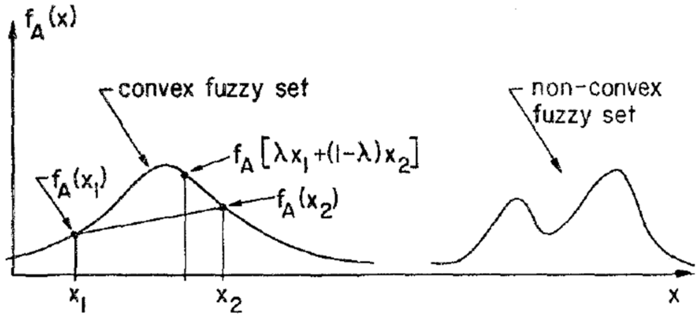
Elementos de X con grado de pertenencia mínimo α.

Restricción de consistencia:

Si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces $A\alpha_1 \subseteq A\alpha_2$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de un conjunto difuso



Conjunto difuso convexo
$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$

Conjunto difuso cóncavo
$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \max\{A(x_1), A(x_2)\}$

para cualesquiera $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ y $\lambda \in [0,1]$.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de un conjunto difuso

Cardinalidad de un conjunto difuso

Existen diversas definiciones,
pero en general puede decirse que no se trata de "contar" el número de elementos del conjunto, sino de determinar una medida de su tamaño.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Teorema de representación
(o principio de identidad)

Todo conjunto difuso puede descomponerse y reconstruirse a partir de una familia de conjuntos no difusos.

- Cualquier conjunto difuso se puede representar por el conjunto de sus α-cortes.
- Cualquier familia de conjuntos indexados y anidados permite definir un conjunto difuso tomándolos como una familia de α-cortes: $\{A\alpha, \alpha \in [0,1]\}$

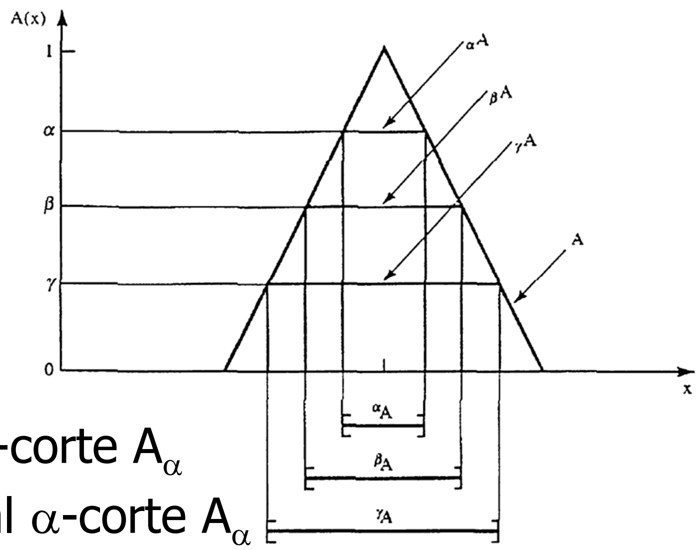
Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Teorema de representación
(o principio de identidad)

$A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha A_\alpha(x)\}$

$A = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$

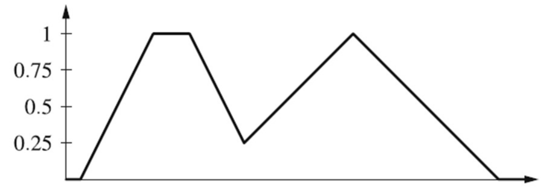
donde
$A_\alpha(x)=1$ si x pertenece al α-corte A_α
$A_\alpha(x)=0$ si x no pertenece al α-corte A_α



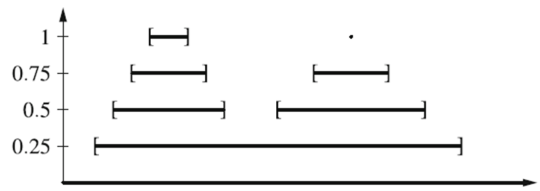
Teorema de representación (o principio de identidad)

Un conjunto difuso puede representarse mediante:

- Su función de pertenencia (representación vertical).



- Un conjunto de α-cortes (representación horizontal).



Teorema de representación (o principio de identidad)

CONSECUENCIAS

- Los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos.
- Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α-cortes anidados (y puede determinarse su solución usando técnicas no difusas).

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Principio de extensión

Permite transformar conjuntos difusos de iguales o distintos universos por medio de una función:

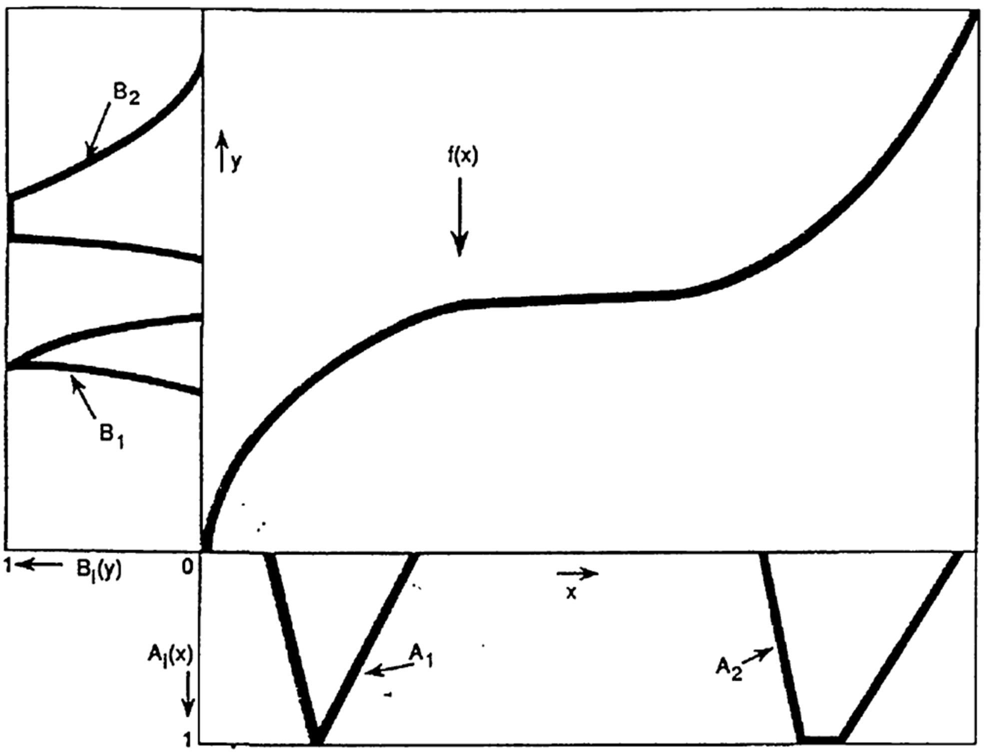
- Sean X e Y dos universos y f una función $f: X \rightarrow Y$
- Sea A un subconjunto difuso sobre X

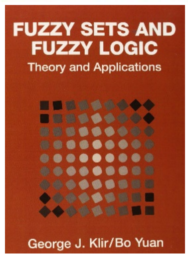
El principio de extensión establece que B=f(A) es un subconjunto difuso de Y con función de pertenencia

$$\mathbf{B(y) = \sup \{A(x) \mid x \in X, y = f(x)\}}$$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Principio de extensión





Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Principio de extensión

EJEMPLO: Sumar 1

y = f(x) = x+1

A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1.0/4 + 0.6/5

B = f(A) = 0.1/3 + 0.4/4 + 1.0/5 + 0.6/6

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Principio de extensión

Generalizado para un universo X que sea el producto cartesiano de n universos: $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$

Función de varias variables $f: X \to Y$

$y=f(x)$ con $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Se transforman

los n conjuntos difusos A_i de los universos X_i

en un conjunto difuso $B=f(A_1,A_2,\dots,A_n)$ de Y

con función de pertenencia

$$\mathbf{B(y) = \sup \{ \min\{A_i(x_i)\} \mid x \in X, y=f(x)\}}$$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Principio de extensión

EJEMPLO: Función suma

$y = f(x_1,x_2) = x_1+x_2$

$A_1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1.0/4 + 0.6/5$

$A_2 = 0.4/5 + 1.0/6$

$B = f(A_1,A_2)$
$= 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1.0/10 + 0.6/11$

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Aplicaciones

¿Cuándo usar la tecnología "fuzzy"?

RESPUESTA CORTA

En procesos complejos,
si no existe un modelo de solución sencillo

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de la lógica difusa (Zadeh, 1992)

- Todo es cuestión de grado.
- El razonamiento exacto es un caso límite del razonamiento aproximado.
- El conocimiento se interpreta como una colección de restricciones elásticas (difusas) sobre un conjunto de variables.
- La inferencia puede verse como la propagación de un conjunto de restricciones elásticas.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Características de la lógica difusa (Zadeh, 1992)

- Sistema difuso (SD/FS): Resultado de la "fuzzificación" (difuminación) de un sistema convencional.
- Los sistemas difusos operan sobre conjuntos difusos en lugar de números.
- La representación de la información en sistemas difusos imita el mecanismo de razonamiento aproximado que realiza la mente humana.

Conjuntos difusos [fuzzy sets]

Aplicaciones

¿Cuándo usar la tecnología "fuzzy"?

- En procesos no lineales.
- Cuando sea necesaria la experiencia de un "experto" basada en conceptos imprecisos (derivados de su experiencia).
- Cuando ciertas partes de un sistema sean desconocidas y no puedan medirse de forma fiable.
- Cuando el ajuste de una variable pueda producir el desajuste de otras variables.
- En general, cuando se trabaje con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre (p.ej. procesos de decisión en Economía o Finanzas).

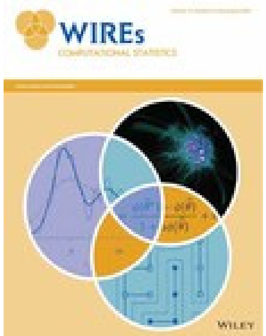
Bibliografía

Miguel Delgado:
Apuntes de Inteligencia Computacional
Universidad de Granada, hasta el curso 2021/2022

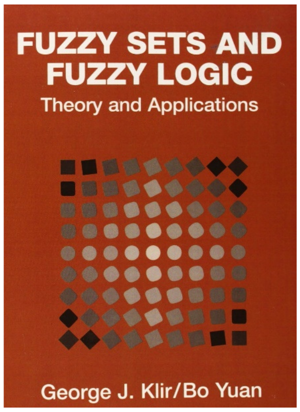
Sesiones grabadas en vídeo, curso 2020/2021:
https://elvex.ugr.es/decsai/computational-intelligence/video/fuzzy/

Bibliografía recomendada

Lógica Difusa



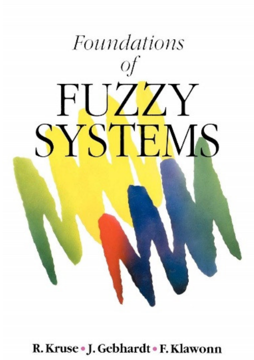
- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory,
  WIREs Computational Statistics,
  John Wiley & Sons, 2:3, May/June 2010.
  DOI 10.1002/wics.82



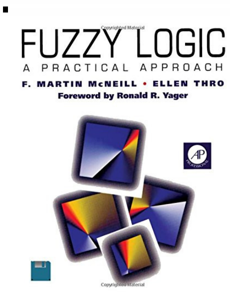
- George J. Klir & Bo Yuan:
  Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications,
  1st edition, Prentice Hall, 1995.
  ISBN 0131011715

Bibliografía complementaria

Lógica y Sistemas Difusos



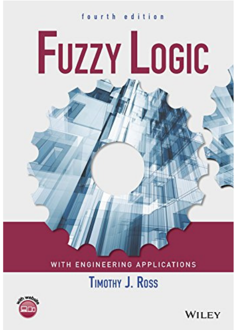
- Rudolf Kruse, Joan E. Gebhardt & Frank Klawonn:
  Foundations of Fuzzy Systems.
  John Wiley & Sons, 1994. ISBN 047194243X.
- Witold Pedrycz & Fernando Gomide:
  An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design.
  MIT Press, 1998. ISBN 0262161710.



- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory and Its Applications,
  Springer, 3rd edition, 1996. ISBN 0792396243
  Springer, 4th edition, 2001. ISBN 9401038708.
- F. Martin McNeill & Ellen Thro:
  Fuzzy Logic: A Practical Approach.
  Morgan Kaufmann, 1994. ISBN 0124859658.

Bibliografía complementaria

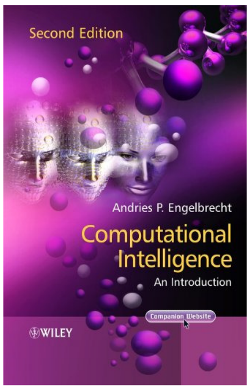
Lógica y Sistemas Difusos

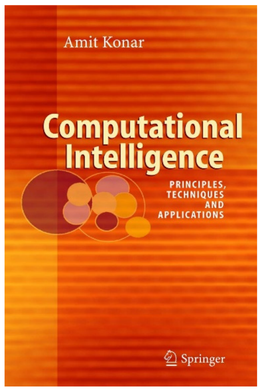


- Timothy J. Ross:
  Fuzzy Logic with Engineering Applications,
  4th edition, John Wiley & Sons, 2017. ISBN 1119235863.
- Lofti A. Zadeh: **Fuzzy Sets**.
  Information and Control, volume 8, issue 3, pp. 338-353,
  June 1965. DOI 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- James C. Bezdek: **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms**. Plenum Press, 1981. ISBN 0306406713.
- Bart Kosko: **Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence**. Prentice Hall, 1992. ISBN 0136114350
- Mohammad Jamshidi, Nader Vadiee & Timothy Ross (editors): **Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications**. Prentice Hall, 1993. ISBN 0133342514.

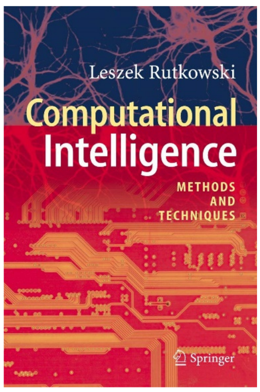
Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional





- Andries P. Engelbrecht:
  Computational Intelligence.
  An Introduction,
  2nd edition, John Wiley, 2007.
  ISBN 0470035617.
- Amit Konar:
  Computational Intelligence.
  Principles, Techniques and Applications,
  Springer Verlag, 2005.
  ISBN 3540208984.
- Leszek Rutkowski:
  Computational Intelligence.
  Methods and Techniques,
  Springer Verlag, 2008.
  ISBN 3540762876.



Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional

- James M. Keller, Derong Liu & David B. Fogel: **Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation**, Wiley - IEEE Press, 2016. ISBN 1119214343
- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim, Matthias Steinbrecher, Frank Klawonn & Christian Moewes: **Computational Intelligence: A Methodological Introduction**. Springer, 2nd edition, 2016. ISBN 1447172949